

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

Указания

- א. Продолжительность экзамена: 2 часа 45 минут.
- ב. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа
Раздел второй – рост и затухание, показательные и логарифмические функции
Вы должны ответить на три вопроса, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ баллов.

ג. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

ד. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

הוראות

- א. משך הבחינה: שתיים וארבעים וחמש דקות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, על שאלה אחת לפחות מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5 , по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дан эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{25k^2} + \frac{y^2}{16k^2} = 1$. k – положительный параметр.

Точка F – правый фокус эллипса.

Дана окружность с центром в точке F , которая проходит через точку пересечения эллипса с положительной полуосью x .

(к) Выразите при помощи k уравнение данной окружности.

Точка B – точка пересечения эллипса с положительной полуосью y .

Точка D – точка пересечения отрезка BF с окружностью.

(а) (1) Найдите отношение отрезка BD к отрезку DF .

(2) Выразите при помощи k координаты точки D .

(б) Выразите при помощи k уравнение касательной к данной окружности в точке D .

Построили квадрат с длиной стороны 15 .

Одна из сторон этого квадрата лежит на касательной, уравнение которой вы нашли в пункте (б).

Точка B лежит внутри квадрата.

(г) Выразите при помощи k уравнение прямой, на которой лежит параллельная касательной сторона квадрата.

Известно, что точка B – точка пересечения диагоналей квадрата.

(д) Найдите значение k .

2. На чертеже справа представлена прямая призма $AOBA'O'B'$,
 основание которой AOB – прямоугольный треугольник, $\angle AOB = 90^\circ$.
 Точка K – середина ребра AB .

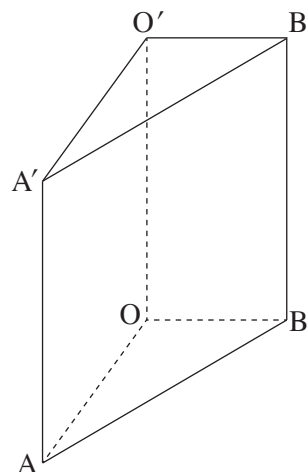
Точка E лежит на отрезке $O'B$ так, что $\overrightarrow{O'E} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{O'B}$.

Точка N лежит на отрезке AE так, что $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AE}$.

Обозначим: $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OO'} = \underline{w}$.

(*) (1) Выразите при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ вектор $\overrightarrow{O'N}$.

(2) Докажите, что точки O' , N , K лежат на одной прямой,
 и найдите отношение $O'K$ к $O'N$.



Дано: $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $E(0, 1, 6)$.

Вершина B лежит на положительной полуоси y , а вершина O' лежит на положительной
 полуоси z .

(*) Найдите координаты точек N и B .

(*) Найдите уравнение плоскости $A'KB'$.

(*) (1) Найдите расстояние между точкой N и плоскостью $A'KB'$.

(2) Найдите объем пирамиды $NA'KB'$.

3. Даны два комплексных числа z_1 и z_2 , произведение которых равно $-19 + 4i$.

$$z_1 = 2 + 3i.$$

(*) Найдите число z_2 .

Дано уравнение $w^3 = z_1 + z_2$, w – комплексная переменная.

(*) Найдите решения этого уравнения.

Дано комплексное число $z = 2(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

Известно, что числа z и z^3 лежат на прямой, которая проходит через точку начала координат.

(*) Найдите четыре возможных значения числа z .

Решения уравнения, найденные вами в пункте (*), и четыре числа, найденные вами в пункте (*),
 соответствуют всем вершинам выпуклого многоугольника на гауссовой плоскости.

(*) (1) Начертите этот многоугольник в системе координат.

(2) Вычислите площадь этого многоугольника.

Дано комплексное число $3(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

Каждое из чисел, соответствующих вершинам многоугольника, умножили на это комплексное
 число, так что получился новый многоугольник.

(*) Найдите, во сколько раз площадь нового многоугольника больше площади многоугольника,
 вычисленной вами в пункте (*).

Раздел второй – рост и затухание, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x} + b$, определенная для любого x .

b – параметр.

(к) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(3). При необходимости, выразите свои ответы при помощи b .

(1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью y .

(3) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.

Известно, что у функции $f(x)$ существует горизонтальная асимптота, уравнение которой $y = 1.5$.

(а) Найдите значение b (найдем оба варианта).

Подставьте в функцию $f(x)$ наименьшее из найденных вами значений b и ответьте на вопросы пунктов (г)–(н).

(а) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Известно, что точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью y – это одна из двух точек перегиба функции $f(x)$.

Производная $f'(x)$ определена для любого x .

(г) (1) Найдите уравнения асимптот производной $f'(x)$, перпендикулярных осям координат (если таковые существуют).

(2) Начертите схематический график производной $f'(x)$.

(н) Дано утверждение: $\int_0^1 (f(x) - 1.5) dx > \frac{1}{e-1}$.

Верно ли это утверждение? Обоснуйте свой ответ.

5. Дана функция $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$.

- (к) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнение асимптоты функции $f(x)$, перпендикулярной оси x .
- (3) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .
- (б) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$ (если таковые существуют).
- (г) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$.

- (т) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Дано выражение $\int_{e^k}^{e^{2k}} \left(\frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{1}{x} \right) dx$, k – параметр, больший 1.

- (н) (1) Определите, значение какого из выражений I–II равно значению данного выражения.

Обоснуйте свой ответ.

I. $k + \ln(k)$ II. $k + \ln 2$

- (2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, осью x и прямыми $x = e^3$ и $x = e^6$.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.